In hochdimensionalen Räumen denken lernen

Meine Oberstufenschüler sollen lernen,

- den hochdimensionalen Raum als abstrakte Struktur zu begreifen,
- lokale Nachbarschaften zu erkennen,
- semantische Richtungen als Vektoren zu verstehen,
- Mannigfaltigkeiten als Kontinua zu interpretieren,
- Projektionen als mentale Modelle zu nutzen.

Erstelle mir eine umfangreiche Aufgabe in Schritten mit der die Schüler das intuitiv und mathematisch formal lernen.

https://chatgpt.com/share/6a5cab6c-d394-83eb-b9d1-efa80a99e285

Das ist eine sehr gute Übung, weil sie zeigt, dass "Räume" nicht nur physische Orte sein müssen. Man baut gemeinsam einen abstrakten Raum, in dem jede Dimension für eine Eigenschaft steht. Anschließend werden Begriffe als Punkte eingetragen und die entstehenden Abstände interpretiert. Genau diese Idee steckt auch hinter modernen Einbettungen (Embeddings) in der KI.

Study-Aufgabe: Wir bauen einen Bedeutungsraum

Lehrer:
Heute bauen wir einen Raum, in dem Wörter leben. Nicht geografisch, sondern nach ihrer Bedeutung.

Wir nehmen zunächst nur **drei Dimensionen**, damit wir sie noch vorstellen können.

Dimensionen:

1. **Lebendig** (0–10)
2. **Technisch** (0–10)
3. **Beweglich** (0–10)

Jeder Begriff bekommt für jede Dimension einen Wert.

Schritt 1

Lehrer:
Wo würdest du einen **Hund** einordnen?

Schüler (Beispiel):

- lebendig = 10
- technisch = 0
- beweglich = 9

Also

Hund = (10,0,9)

Lehrer:
Wie sieht es mit einem **Auto** aus?

Schüler

- lebendig = 0
- technisch = 10
- beweglich = 8

Auto = (0,10,8)

Lehrer

Und ein **Baum**?

Schüler

- lebendig = 9
- technisch = 0
- beweglich = 1

Baum = (9,0,1)

Lehrer

Und ein **Roboter**?

Schüler

- lebendig = 2
- technisch = 9
- beweglich = 7

Roboter = (2,9,7)

Jetzt besitzen wir vier Punkte:

Begriff	Koordinaten
Hund	(10,0,9)
Auto	(0,10,8)
Baum	(9,0,1)
Roboter	(2,9,7)

Schritt 2: Distanzen interpretieren

Lehrer

Welche beiden Begriffe liegen vermutlich am nächsten zusammen?

Der Schüler muss noch gar nichts rechnen.

Typische Vermutung:

- Auto ↔ Roboter

Warum?

Weil beide technisch sind.

Nun rechnen wir tatsächlich.

Zwischen Auto und Roboter:

\sqrt{(0-2)^2+(10-9)^2+(8-7)^2}=\sqrt6\approx2{,}45

Zwischen Hund und Baum:

\sqrt{(10-9)^2+(0-0)^2+(9-1)^2}=\sqrt{65}\approx8{,}06

Obwohl Hund und Baum beide lebendig sind, trennt sie die Dimension “beweglich” deutlich.

Schritt 3: Cluster erkennen

Jetzt betrachten wir alle Punkte.

Lehrer

Welche Gruppen entstehen?

Schüler könnte sagen:

Cluster 1:

- Auto
- Roboter

Cluster 2:

- Hund
- Baum

Das bedeutet:

Der Raum hat von selbst zwei Gruppen gebildet.

Niemand hat die Gruppen vorher festgelegt.

Schritt 4: Eine neue Dimension hinzufügen

Jetzt wird der Raum vierdimensional.

Neue Dimension:

Natürlichkeit

0 = künstlich

10 = natürlich

Jetzt ergänzen wir:

Begriff	Natürlichkeit
Hund	10
Baum	10
Auto	0
Roboter	1

Jetzt liegen Hund und Baum noch näher zusammen.

Schritt 5: Der spannende Teil

Lehrer

Welche Dimension fehlt vielleicht noch?

Der Schüler könnte vorschlagen:

- gefährlich
- intelligent
- groß
- weich
- teuer
- laut
- freundlich

Jede neue Idee erzeugt eine neue Achse.

Der Bedeutungsraum wächst also mit unserem Wissen.

Schritt 6: Der KI-Moment

Jetzt kommt die Überraschung.

Lehrer

Unsere Wörter sind jetzt Punkte im Raum.

Moderne KI macht im Grunde dasselbe.

Sie benutzt aber nicht vier Dimensionen …

nicht zehn …

nicht hundert …

sondern oft **mehrere hundert oder sogar mehrere tausend Dimensionen**.

Diese Dimensionen tragen keine Namen wie “lebendig” oder “technisch”. Stattdessen entstehen sie automatisch beim Lernen aus großen Textmengen. Dadurch liegen Wörter mit ähnlicher Bedeutung nahe beieinander und bilden Cluster – ähnlich wie in unserer kleinen Übung, nur in einem viel höherdimensionalen Raum.

Reflexionsfragen

Zum Abschluss können die Schülerinnen und Schüler diskutieren:

- Warum verändert eine neue Dimension die Abstände zwischen Begriffen?
- Können zwei Begriffe in einigen Eigenschaften ähnlich und in anderen sehr verschieden sein?
- Ist die Wahl der Dimensionen objektiv oder hängt sie von unserem Blickwinkel ab?
- Warum könnte ein Raum mit 500 Dimensionen Bedeutungen besser beschreiben als einer mit nur drei?

Diese Übung führt schrittweise von einem anschaulichen, selbst konstruierten Bedeutungsraum zu der zentralen Idee hyperdimensionaler Repräsentationen: **Bedeutung kann als Lage eines Punktes in einem hochdimensionalen Raum verstanden werden.**